



Validación de un cuestionario de razonamiento probabilístico condicional

Carmen Díaz¹ e Inmaculada de la Fuente²

¹ Universidad de Huelva¹. ² Universidad de Granada

RESUMEN

La utilidad del razonamiento probabilístico condicional en psicología y educación se deriva de su aplicación al diagnóstico, evaluación, toma de decisiones e inferencia. En este trabajo describimos la validación de un cuestionario destinado a evaluar este razonamiento. A partir de las respuestas de una muestra de 591 sujetos se analizan la consistencia interna y estructura factorial, que sugiere un constructo subyacente, interpretado como conocimiento formal sobre probabilidad condicional y no relacionado con los sesgos de razonamiento descritos en la literatura. La fiabilidad test- retest es estimada en una segunda muestra de 102 participantes. El análisis discriminante de puntuaciones en dos grupos de alumnos con y sin instrucción (n=298 y n=177) indica la validez de criterio del cuestionario

Palabras clave: Razonamiento probabilístico condicional, evaluación, construcción de un cuestionario.

ABSTRACT

Conditional probabilistic reasoning is useful in psychology and education due to its applications to diagnose, assessment, decision making and inference. We describe the validation of a questionnaire directed to assess this type of reasoning. We analyze the questionnaire internal consistency and the factor structure in a sample of 591 participants. Results suggest an underlying construct, that we interpret as formal knowledge on conditional probability, and which is unrelated to the reasoning biases described in the literature. The test-retest reliability is estimated from a sub-sample (n= 102). Discriminant analysis of scores in two groups of students with and without instruction (n=298 and n=177) indicates criteria validity for the questionnaire.

Keywords: Conditional probabilistic reasoning, assessment, questionnaire building,

¹ Dirección de contacto: M.Carmen Díaz Batanero. Dpto. de Psicología. Facultad de Ciencias de la Educación
Avda. Fuerzas Armadas, s/n, 21071 Huelva
Email: carmen.diaz@dpsi.uhu.es



1.- Introducción

Un componente fundamental en inferencia, tanto clásica, como bayesiana es el razonamiento probabilístico condicional, que permite incorporar cambios en nuestro grado de creencia sobre los sucesos con una nueva información. El razonamiento probabilístico condicional se aplica también en el diagnóstico, evaluación y toma de decisiones. Sin embargo, incluso cuando las investigaciones previas han informado de errores en el razonamiento probabilístico condicional, no se encuentra un instrumento comprensivo que evalúe, el conocimiento formal, y los sesgos de razonamiento en una única aplicación (Díaz y de la Fuente, 2005).

Consecuentemente, nuestra investigación trató de proporcionar un instrumento válido, fiable y de sencilla aplicación, que llenase este hueco. Disponer un instrumento válido y fiable para esta finalidad tiene una indudable utilidad, tanto para el diagnóstico de las dificultades de los estudiantes en la enseñanza del tema, como para obtener datos que puedan utilizarse en las investigaciones sobre comprensión de la probabilidad condicional y de otros conceptos estadísticos que se basan en ella.

Un segundo objetivo fue estudiar la hipótesis previa de que los sesgos de razonamiento sobre probabilidad condicional no se relacionan entre si, ni con el conocimiento formal sobre el tema.

Las investigaciones relacionadas comienzan con Fischein y Gazit (1984) y muestran que los problemas de probabilidad condicional son más difíciles en situaciones de muestreo sin reemplazamiento que en las de muestreo con reemplazamiento. Posteriormente, Tarr y Jones (1997) definen cuatro niveles de comprensión de la probabilidad que van desde el nivel subjetivo, donde el sujeto ignora los datos numéricos al realizar una predicción hasta el nivel numérico, donde se asignan probabilidades correctas y distinguen entre sucesos dependientes e independientes. No obstante (Tarr y Lannin, 2005) las dificultades que se describen a continuación persisten en la universidad:

1. *Condicionamiento y causación.* Algunas personas identifican como similares condicionalidad y causalidad, aunque la relación condicional $P(A/B)$ puede ser debida a una relación diagnóstica si A es causa de B (Tversky y Kahneman, 1982 a).
2. *Falacia del eje de tiempo* (Falk, 1989) o creencia de que un suceso no puede condicionar otro que ocurra anteriormente (Gras y Totohasina, 1995).
3. *Situaciones sincrónicas y diacrónicas:* Si el problema se plantea como una serie de experimentos secuenciales (situaciones diacrónicas) o simultáneos (sincrónicas) (Falk, 1989; Ojeda, 1995). Formalmente las dos situaciones son equivalentes, aunque los sujetos no siempre las perciben de este modo (Sánchez y Hernández, 2003).



4. *Resolución de problemas bayesianos*. Las personas no usan el teorema de Bayes de forma intuitiva (Tversky y Kahneman, 1982b; Koehler, 1996), siendo parte de la dificultad debida a la representación escogida para resolver el problema (Totohasina, 1992). Recientemente se investiga el formato de presentación en frecuencias (Cosmides y Tooby, 1996; Gigerenzer, 1994; Gigerenzer y Hoffrage, 1995; Lonjedo y Huerta, 2005) y se organizan experimentos de enseñanza para mejorar el razonamiento bayesiano (Martignon y Wassner, 2002).
5. *Otras dificultades* incluyen comprender el concepto de independencia (Sánchez, 1996; Estrada, Díaz y de la Fuente, 2006), *la falacia de la conjunción* o creencia que es más probable la intersección de dos sucesos que cada uno de ellos por separado (Tversky y Kahneman, 1982a; Díaz, 2005) y la confusión de las dos probabilidades $P(A/B)$ y $P(B/A)$ o *falacia de la condicional transpuesta* (Falk, 1989).

2.- Método

Se descompuso el constructo *comprensión de la probabilidad condicional* en unidades semánticas (ver tabla 1) definidas a partir del análisis de contenido de todos los libros de texto recomendados al menos en cuatro Facultades de Psicología españolas en las asignaturas de análisis de datos. Dicho análisis y la revisión de las investigaciones previas sirvió para recopilar $n=49$ ítems que fueron traducidos y adaptados. En la selección de ítems para el cuestionario piloto participaron 13 expertos investigadores en probabilidad condicional, seleccionándose para cada unidad de contenido los ítems que lo cubrieran y hubiesen recibido una alta valoración y acuerdo en el juicio de expertos (puntuación media y mediana superior a 4 en escala 0-5). De entre los ítems elegidos con este criterio se incluyó para cada contenido el que presentasen menor índice de dificultad (estimados a partir de muestras de alumnos de entre 49 y 117 alumnos de psicología por ítem). Una nueva prueba piloto del cuestionario ($n=94$ estudiantes) y otro juicio de expertos ($n=10$) llevó al cuestionario final (ver anexo), compuesto de 18 ítems, algunos con diferentes partes que puntúan independientemente, cuyo contenido primario se presenta en la tabla 1. El análisis de las características psicométricas se llevó a cabo mediante tres estudios que se describen a continuación.

Estudio 1. Los sujetos del estudio son 590 alumnos de Psicología de las Universidades de Granada, Murcia, Jaén y Huelva, todos ellos cursando la asignatura Análisis de Datos en primer año de Psicología, con edad entre 18 y 20 años. Se analiza la fiabilidad de consistencia interna y coeficientes basados en el análisis factorial. Se estudia la validez de constructo analizando la estructura de las respuestas al cuestionario mediante análisis factorial exploratorio con SPSS. El método de extracción utilizado para el análisis factorial fue el de componentes principales. Con objeto de obtener una estructura más simple se realizó una rotación Varimax, que maximiza la varianza de los coeficientes que definen los factores.

Estudio 2. De la muestra del estudio 1 se seleccionaron 112 sujetos que cumplimentaron dos veces el cuestionario para el estudio de la fiabilidad test-retest, siendo la puntuación media en el cuestionario en este grupo similar al del resto de la muestra, y la prueba T de



diferencia de medias independientes no significativa ($p=0,22$). El intervalo de tiempo entre las dos aplicaciones del cuestionario fue de cuatro semanas.

Tabla 1. Contenido primario evaluado por cada ítem

Contenido	Item
1. Definición de la probabilidad condicional	11
2. Reconocer que la probabilidad condicional restringe el espacio muestral	12
3. Falacia de las tasas base	2
4. Diferenciar probabilidad condicional, simple y conjunta	1
5. Falacia de la condicional transpuesta	7
6. Falacia de la conjunción	6
7. Diferenciar entre sucesos independientes y mutuamente excluyentes	3
8. Calcular una probabilidad condicional en un experimento simple	13
9. Calcular una probabilidad condicional en un experimento con reposición	15
10. Calcular una probabilidad condicional en un experimento sin reposición	4, 9a
11. Calcular una probabilidad condicional a partir de una probabilidad simple y conjunta	5
12. Calcular una probabilidad condicional cuando el eje temporal está invertido	8, 9b
13. Diferenciar situaciones condicionales, causales y diagnósticas	5, 7
14. Calcular una probabilidad condicional en una situación diacrónica	4,10
15. Calcular una probabilidad condicional en una situación sincrónica	5, 17
16. Calcular una probabilidad conjunta en sucesos independientes	16
17. Calcular una probabilidad conjunta en sucesos dependientes	10, 17
18. Calcular una probabilidad total	14
19. Resolver un problema de Bayes	2, 18

Estudio 3. Participaron dos grupos de alumnos de primer curso de psicología de las universidades citadas, algunos de los cuáles ya habían estudiado la probabilidad condicional y otros no ($n=177$, grupo sin instrucción; $n=208$, grupo con instrucción). El análisis discriminante del conjunto de puntuaciones en los diferentes ítems se utiliza para determinar la validez de criterio del cuestionario, considerándose el criterio dicotómico haber estudiado o no la probabilidad condicional el curso que se pasó el cuestionario.

3.- Resultados

En el estudio 1, la fiabilidad de consistencia interna ($n=590$) dio un valor de 0,797, siendo estadísticamente significativa la correlación corregida ítem- test en todos los ítems y oscilando entre 0,154 y 0,624, excepto en los ítems 7 (falacia de la condicional transpuesta) y 9b (falacia del eje de tiempos) en que fue próxima a cero (Tabla 2). Los coeficientes, basados en el análisis factorial (Barbero, 2003) dieron los siguientes valores: Theta de Carmines $\theta=0,82$; Omega de Heise y Bohrnsted, $\Omega=0,896$, cumpliéndose la relación: $\alpha < \theta < \Omega$. Estos valores, junto con el hecho de que el primer autovalor en el análisis factorial explicó mucho mayor porcentaje de varianza que los siguientes, y que la mayoría de los ítems tenían pesos



apreciables en el mismo, antes de la rotación, apoya una cierta unidimensionalidad del cuestionario (Carmines y Zéller, 1979). Los índices de dificultad varían entre 0,25 (ítem 6, falacia de la conjunción) y 0,84 (ítem 1a, cálculo de probabilidad simple a partir de una tabla e ítem 4, probabilidad condicional en muestreo sin reposición). En la Tabla 3 se presentan los resúmenes estadísticos de la distribución de puntuaciones (número total de ítems correctamente resueltos).

Tabla2. Índices de dificultad y discriminación de la versión final del cuestionario

	Índice de dificultad	Índice discriminación (Correlación ítem-total)
I1A	0,84	0,39
I1B	0,52	0,47
I1C	0,53	0,47
I1D	0,51	0,45
I2	0,46	0,26
I3	0,28	0,17
I4	0,84	0,26
I5	0,38	0,16
I6	0,25	0,24
I7	0,32	0,09
I8	0,20	0,18
I9A	0,71	0,19
I9B	0,29	-0,04
I10	0,76	0,20
I11	0,35	0,45
I12	0,80	0,46
I13	0,30	0,38
I14	0,79	0,47
I15	0,69	0,52
I16	0,53	0,49
I17	0,61	0,62
I18	0,55	0,60

Tabla 3. Resúmenes estadísticos del número total de ítems correctos

	Estadístico	Error típ.
Media	10,6041	,15947
Intervalo de confianza para la media al 95%	Límite inferior	10,2909
	Límite superior	10,9173
Mediana	11,0000	
Desv. típ.	3,87678	
Mínimo	1,00	
Máximo	22,00	
Amplitud intercuartil	5,00	
Asimetría	,071	,101
Curtosis	-,199	,201

La extracción inicial del análisis factorial produce 7 factores con autovalor mayor que 1, que explicaron el 54,5% de la varianza total. El primer factor explica un 22,3% de la varianza, mientras que los siguientes entre el 4,6 y el 9,98 cada uno. La importancia relativa del primer factor proporciona una evidencia de validez de constructo, puesto que el porcentaje



es claramente superior al explicado por los restantes (Morales, 1988). En la tabla 4 se muestra la matriz de componentes rotada, en la que, para facilitar la interpretación, se ha incluido una descripción del contenido del ítem, se han suprimido los pesos factoriales menores que 0,3 y se han ordenado las variables por su contribución relativa al primer factor.

El primer factor (el de mayor peso relativo) incluye la mayoría de los ítems de respuesta abierta. En particular el problema relacionado con el Teorema de Bayes, presenta la contribución mayor, seguido del relacionado con la probabilidad total y los de probabilidad compuesta. Todos estos problemas requieren un proceso de resolución de al menos dos pasos, el primero de los cuales es el cálculo de una probabilidad condicional, que se utiliza seguidamente (ej. en la regla del producto). Interpretamos este factor como la *habilidad de resolver problemas complejos de probabilidad condicional*.

Tabla 4. Matriz de componentes rotados simplificada en el análisis factorial de primer orden

Items en el cuestionario	Componente						
	1	2	3	4	5	6	7
I18. Teorema de Bayes	0,76						
I14. Probabilidad total	0,76						
I17. Probabilidad conjunta dependencia	0,75						
I16. Probabilidad conjunta independencia	0,67						
I15. Probabilidad condicional reemplazamiento	0,43	0,42					
I1c. Probabilidad condicional (tabla)		0,79					
I1d. Probabilidad condicional (tabla)		0,77					
I1b. Probabilidad compuesta (tabla)	0,32	0,61					
I1a. Probabilidad simple (tabla)		0,61					
I13. Probabilidad condicional; experimento simple			0,67				
I11. Definición			0,59				
I12. Espacio muestral	0,40	0,45					
I9b. Falacia eje temporal				0,71			
I8. Falacia eje temporal				0,70			
I5. Probabilidad condicional (de simple y compuesta)					0,66		
I6. Falacia conjunción					0,62		
I4. Probabilidad condicional sin reposición			0,44	0,39			
I9a. Probabilidad condicional sin reposición						0,66	
I7. Falacia condicional transpuesta						-0,65	
I3. Independencia/ sucesos excluyentes							0,68
I2. Teorema Bayes (tasas base)	0,34						0,48
I10. Probabilidad conjunta dependencia, diacrónica				0,35			-0,46

El segundo factor explica un 9,98% de la varianza e incluye ítems de cálculo de una probabilidad simple, probabilidad conjunta y probabilidad condicional a partir de una tabla de doble entrada (ítem 6). Es el único ítem en que los datos se presentan en formato tabular, y no verbal, lo que sugiere que el *formato de la tarea* afecta a la ejecución, un hecho que también fue informado por Ojeda (1996) y Gingerenzer (1994).



Un tercer factor (7,94% de la varianza) muestra la relación entre la definición, el espacio muestral y el cálculo de probabilidades condicionales en situaciones con y sin reemplazamiento; habilidades que indican que se alcanza el nivel máximo de comprensión en la clasificación de Tarr y Jones (1997). Hemos denominado a este factor *comprensión conceptual de la probabilidad condicional*. El conjunto de los tres primeros factores (resolución de problemas complejos, lectura de tablas y comprensión conceptual) definiría la *comprensión formal* de la probabilidad condicional.

El resto de factores describen los diferentes sesgos que afectan al razonamiento condicional, que no se relacionan con la comprensión formal, apoyando nuestra hipótesis en este sentido. Cada uno de los sesgos (*condicional transpuesta, falacia del eje temporal, falacia de la conjunción, confusión entre independencia y mutua exclusividad, así como falacia de tasas base*) aparecen separados de los primeros factores y entre sí. Algunos de ellos aparecen opuestos o relacionados con algunas unidades semánticas del razonamiento probabilístico condicional. Por ejemplo, la independencia está ligada a la falacia de las tasas base (donde los sujetos tienen que juzgar si los sucesos son independientes o no) y opuesta a la idea de dependencia.

Un análisis factorial de segundo orden llevado a cabo sobre las puntuaciones en los siete factores identificados dio como resultado 4 componentes que explicaron el 57% de la varianza. De nuevo se usó el método de componentes principales y rotación Varimax. Observamos (Tabla 5) ahora los siguientes factores (todos ellos explicaron el mismo porcentaje de varianza):

- La falacia de la condicional transpuesta, si se supera (puntuación positiva), aparece ligada a la correcta resolución de problemas (Factor 1). La diferenciación entre una probabilidad condicional y su transpuesta favorecerá la resolución de los problemas complejos de probabilidad.
- La falacia de tasas base e independencia aparece contrapuesta a la falacia de la conjunción y los dos sesgos aparecen no correlacionados con los factores que representan las capacidades formales relacionadas con la probabilidad condicional (Factor 2).
- La comprensión conceptual aparece ligada a la falacia del eje de tiempo, es decir una mejora en la comprensión conceptual permitiría superar esta falacia (Factor 3).
- Por último (Factor 4) la capacidad de resolver problemas aparece ligada a la capacidad de lectura de datos al cambiar el formato de la tarea.



Tabla 5. Matriz de componentes rotados simplificada en el análisis factorial de segundo orden

Factores de orden 1	Componente			
	1	2	3	4
Condicional transpuesta	,798			
Tasas base /independencia		,756		
Falacia conjunción		-,620		
Comprensión conceptual			,777	
Falacia eje tiempo			,524	
Formato tarea				,891
Resolución problemas	,369			,373

En el estudio 2 se obtuvo un alto valor de los coeficiente de correlación en la fiabilidad test-retest (n=112), tanto de Pearson (0,876) como de Spearman (0,867), oscilando las correlaciones del mismo ítem en las dos aplicaciones entre 0,299 y 0,799 y siendo todas ellas estadísticamente significativas. Todo ello asegura una alta estabilidad del cuestionario, medido por la fiabilidad test-retest (Carmines y Zéller, 1979).

En el estudio 3 la prueba Lambda de Wilks (0,631) y correlación canónica (0,697) indican el poder discriminante del conjunto de ítems y es un indicio de validez del cuestionario RPC respecto al criterio dicotómico haber seguido o no instrucción sobre el tema. Todos los ítems resultaron con una diferencia estadísticamente significativa en las pruebas univariantes a favor del grupo con instrucción, excepto los ítems 4 y 9a (falacia del eje de tiempos) y 7 (falacia de la condicional transpuesta) relacionados con sesgos en el razonamiento condicional, que parecen no mejorar con la instrucción. La validez de criterio también se apoya por los resultados de la clasificación (Tabla 6), que muestra un 82% de clasificaciones correctas.

Tabla 6. Resultados de la clasificación

Grupo original	Grupo de pertenencia pronosticado		Total
	Sin instrucción	Con instrucción	
Sin instrucción	151 (85,3%)	26 (14,7%)	177
Con instrucción	42 (85,3%)	166 (79,7%)	208

Clasificados correctamente el 82,34% de los casos agrupados originales.

4.- Discusión

El objetivo del trabajo fue aportar un cuestionario para evaluar la comprensión y sesgos de razonamiento ligados al razonamiento probabilístico condicional, y aportar evidencias de su fiabilidad y validez, lo cual se llevó a cabo con diferentes métodos y perspectivas teóricas en tres estudios.

Respecto a la fiabilidad, todos los coeficientes obtenidos (consistencia interna, coeficientes basados en el análisis factorial, fiabilidad test- retest) indican una alta fiabilidad del cuestionario. Asimismo se obtuvieron estadísticos muy similares tanto para las puntuaciones totales como para los ítems y sus intercorrelaciones y covarianzas en las dos pasaciones en el estudio de fiabilidad test- retest.



El análisis de validez de criterio (estudio 3) muestra que el cuestionario RPC discrimina adecuadamente a los estudiantes que tuvieron o no instrucción específica en probabilidad condicional en el mismo curso en que se pasó el cuestionario, tanto a nivel de número total de respuestas correctas (puntuación total), como mediante el vector de respuestas a los ítems (análisis discriminante). Individualmente todos los ítems menos los 4, 9a y 7 (relacionados con sesgos psicológicos) también discriminan a los dos grupos de estudiantes. La falta de discriminación de estos ítems apoyan la teoría que algunos sesgos de razonamiento sobre probabilidad condicional no mejoran con la actual enseñanza (Sedlmeier, 2002).

El análisis de validez de constructo (que es parte del estudio 1) confirma la hipótesis previa de existencia de un constructo subyacente (definido por el peso comparativamente alto del primer factor antes de la rotación) que se subdivide en diferentes componentes, todos ellos relacionados con el razonamiento de tipo lógico matemático en probabilidad condicional. Al mismo tiempo aparecen otra serie de factores cada uno de ellos identificando de sesgos particulares en este razonamiento, lo que apunta a nuestra hipótesis de la estructura multidimensional del cuestionario RPC y de nuevo al hecho que estos sesgos no se relacionan con el conocimiento formal del tema (indicado por los tres primeros factores) y por tanto no mejorarían con la instrucción, tal como se lleva a cabo en la actualidad. El análisis factorial de segundo orden confirma la falta de relación de alguno de los sesgos (falacia de la conjunción, tasas base, confusión independencia y mutua exclusividad) de los componentes que describen el conocimiento formal. Sin embargo en este segundo análisis, el conocimiento conceptual o la capacidad de resolver problemas de probabilidad parece mejorar la falacia de la conjunción y de la condicional transpuesta.

En resumen, los resultados obtenidos nos sugieren que “la estadística debiera enseñarse en conjunción con material sobre estrategias intuitivas y errores inferenciales de razonamiento” (p.281). Dado el interés de comprender y aplicar correctamente la probabilidad condicional en diagnóstico clínico, evaluación y toma de decisiones, así como en la comprensión de la inferencia, sería de interés seguir estas recomendaciones.

5.- Referencias

- Barbero, M. (2003). *Psicometría II. Métodos de elaboración de escalas*. Madrid: UNED.
- Carmines, E. G. y Zeller, R. A. (1979). Reliability and validity assessment. *London: Sage*.
- Cosmides, L. y J. Tooby. (1996). Are humans good intuitive statisticians after all? Rethinking some conclusions from the literature on judgment under uncertainty. *Cognition*, 58, 1-73.
- Díaz, C. (2005). Evaluación de la falacia de la conjunción en alumnos universitarios. *Suma*, 48, 45-50.



- Díaz, C. y de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon*, 59, 245-260.
- Eddy, D. M. (1982). Probabilistic reasoning in clinical medicine: Problems and opportunities. En D. Kahneman, P. Slovic y A. Tversky (Eds.), *Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press.
- Estepa, A. (1994). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Estrada, A., Díaz, C. y de la Fuente, E. I. (2006). Un estudio inicial de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en alumnos universitarios En P. Bolea, M. J. Gonzáles y M. Moreno (Eds.), *Actas del IX Simposio de la SEIEM* (pp. 277-284). Huesca: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.
- Falk, R. (1989). Inference under uncertainty via conditional probabilities. En R. Morris (Ed.), *Studies in mathematics education: Vol.7. The teaching of statistics* (pp. 175-184). Paris: UNESCO.
- Fischbein, E. y Gazit, A. (1984). Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics*, 15, 1-24.
- Gigerenzer, G. (1994). Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is important for psychology (and vice-versa). En G. Wright y P. Ayton (Eds.), *Subjective probability* (pp. 129 – 161). Chichester: Wiley.
- Gigerenzer, G., y Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats (pp. 129-161). *Psychological Review*, 102, 684 – 704.
- Gras, R., y Totohasina, A. (1995). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49 – 95.
- Koehler, J. J. (1996). The base rate fallacy reconsidered: Descriptive, normative, and methodological challenges. *Behavior and Brain Sciences*, 19, 1-54.
- Lonjedo, M, A. y Huerta, P. (2005). The nature of the quantities in a conditional probability problem. Its influence in the problem resolution. *Proceedings of CERME IV*. On line: <http://cerme4.crm.es/Papers%20definitius/5/wg5litofpapers>.
- Martignon, L. y Wassner, C. (2002). Teaching decision making and statistical thinking with natural frequencies. En B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching of Statistics*. Cape Town: International Statistical Institute. CD ROM.



- Morales, P. (1988). *Medición de actitudes en psicología y educación*. San Sebastián: Universidad de Comillas.
- Ojeda, A. M. (1996). Contextos, representaciones y la idea de probabilidad condicional. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemáticas educativas* (pp.291-310). México: Grupo Editorial Iberoamericano.
- Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes*, 40, 255 – 269.
- Sánchez, E. (1996). Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp. 389–404). México: Grupo Editorial Iberoamericano.
- Sánchez, E. y Hernández, R. (2003). Variables de tarea en problemas asociados a la regla del producto en probabilidad. En E. Filloy (Coord.), *Matemática educativa, aspectos de la investigación actual* (pp. 295 –313). México: Fondo de Cultura Económica.
- Sedlmeier, P. (2002). Improving statistical reasoning by using the right representational format. In B. Phillips (Ed.). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 6)*. Cape Town: International Statistical Institute. CD ROM.
- Tarr, J. E. y Jones, G. A. (1997). A framework for assessing middle school students' thinking in conditional probability and independence. *Mathematics Education Research Journal*, 9, 39-59.
- Tarr, J. E., y Lannin, J. K. (2005). How can teachers build notions of conditional probability and independence? En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp.216-238). New York: Springer.
- Totohasina, A. (1992). *Méthode implicative en analyse de données et application á l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle*. Tesis doctoral Universidad de Rennes I.
- Tversky, A. y Kahneman, D. (1982 a). Judgements of and by representativeness. En D. Kahneman P. Slovic & A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 84-98). New York: Cambridge University Press.
- Tversky, A, y Kahneman, D. (1982 b). Evidential impact of base rates. En D. Kahneman P. Slovic & A. Tversky (Eds.), *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases* (pp. 153-160). New York: Cambridge University Press.



Anexo: Cuestionario RPC

Parte I: Lectura de tablas

Ítem 1. (Estepa, 1994). En una población se ha realizado una entrevista a un grupo de hombres, obteniendo los siguientes resultados:

	menos de 55 años	más de 55 años	Total
Ha sufrido un ataque al corazón	29	75	104
No ha sufrido ataque	401	275	676
Total	430	350	780

Si elegimos al azar una de estas personas:

- ¿Cuál es la probabilidad de que haya tenido un ataque al corazón?
- ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 55 años y además haya tenido un ataque al corazón?
- Sabiendo que la persona escogida tiene más de 55 años, ¿Cuál es la probabilidad de que haya tenido un ataque al corazón?
- Sabiendo que la persona escogida ha tenido un ataque al corazón, ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 55 años?

Parte II. Ítems de opciones múltiples

Ítem 2 (Tversky & Kahneman, 1982a). Un taxi se vio implicado en un accidente nocturno con choque y huida posterior. Hay dos compañías de taxis en la ciudad, la Verde y la Azul. El 85% de los taxis de la ciudad son Verdes y el 15% Azules. Hubo un testigo del accidente. El tribunal comprobó la fiabilidad del testigo bajo las mismas circunstancias que había la noche del accidente y llegó a la conclusión de que el testigo identificaba correctamente cada uno de los colores en el 80% de las ocasiones y fallaba en el 20%. Sabiendo que el testigo identificó el taxi como azul, ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi implicado en el accidente fuera en efecto Azul?

- 80/100
- 15 /100
- $(15/100) \times (80/100)$
- $\frac{15 \times 80}{85 \times 20 + 15 \times 80}$

Ítem 3. (Sánchez, 1996). Se extrae una carta al azar de una baraja española (40 cartas con cuatro palos: oros, bastos, espadas y copas. Cada palo tiene los números del 1 al 7, sota caballo y rey). Sea A el suceso "se extrae una carta de oros" y B el suceso "se extrae un rey". ¿Los sucesos A y B son independientes?

- No son independientes, porque en la baraja hay un rey de oros.
- Sólo si sacamos primero una carta para ver si es rey y se vuelve a colocar en la baraja y luego sacamos una segunda carta para mirar si es oros.
- Sí, porque $P(\text{rey de oros}) = P(\text{rey}) \times P(\text{oros})$,
- No, porque $P(\text{rey} / \text{oros}) \neq P(\text{rey})$.



Ítem 4. Una caja tiene cuatro focos, de los cuales dos son defectuosos. Se sacan dos al azar, uno tras otro sin reemplazamiento. Si el primer foco fue defectuoso, entonces:

- Es mas probable que el segundo sea defectuoso;
- Es más probable que el segundo no sea defectuoso;
- La probabilidad de que el segundo sea defectuoso es igual a la probabilidad de que no lo sea.

Ítem 5. Eddy (1982). La probabilidad de que una mujer tenga una mamografía positiva es el 10.3%. La probabilidad de que una mujer tenga cáncer de pecho y una mamografía positiva es de 0.8%. Una mujer se realiza una mamografía y resulta positiva. ¿Cuál es la probabilidad de que realmente tenga cáncer?

- $\frac{0,8}{10,3} = 0,0776$, probabilidad de 7,76%
- $10,3 \times 0,8 = 8,24$, probabilidad del 8,24%
- 0,8 %

Ítem 6. (Tversky y Kahneman, 1982 b). Supón que una estrella del tenis alcanza la final de Roland Garros en 2005. Para ganar el partido hay que ganar tres sets de cinco. ¿Cuál de los siguientes sucesos consideras más probable?

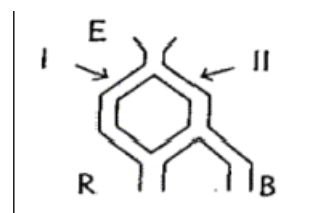
- El jugador pierde el primer set.
- El jugador pierde el primer set pero gana el partido.
- Los dos sucesos son iguales de probables.

Ítem 7. (Pollatsek et al. 1987). Un test diagnóstico de cáncer fue administrado a todos los residentes de una gran ciudad en la que hay pocos casos de cáncer. Un resultado positivo en el test es indicativo de cáncer y un resultado negativo es indicativo de ausencia de cáncer. ¿Qué te parece más probable?

- Que una persona tenga cáncer si ha dado positivo en el test de diagnóstico.
- Que un test de diagnóstico resulte positivo si la persona tiene cáncer.
- Los dos sucesos tienen la misma probabilidad.

Ítem 8. Ojeda (1996). Una bola se suelta por la entrada E. Si sale por R, ¿Cuál es la probabilidad de que haya pasado por el canal 1?

- 1/2
- 1/3
- 2/3
- No se puede calcular



Ítem 9. (Falk, 1989). Una urna contiene dos bolas blancas y dos bolas negras. Extraemos a ciegas dos bolas de la urna, una detrás de otra, sin devolver la primera a la urna. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola negra en segundo lugar, habiendo extraído una bola negra en primer lugar? $P(N_2/N_1)$

- 1/2
- 1/6
- 1/3
- 1/4



¿Cuál es la probabilidad de haber extraído una bola negra en primer lugar, sabiendo que hemos extraído una bola negra en segundo lugar? $P(N_1/N_2)$

- a. $1/3$
- b. No se puede calcular
- c. $1/6$
- d. $1/2$

Ítem 10. Se tiene una bolsa con 1 bola azul y 2 bolas rojas. Se saca una bola al azar. Sin reponerla otra vez en la bolsa se saca una segunda bola. ¿Qué suceso es más probable?

- a. Sacar dos bolas rojas.
- b. Sacar primero una bola roja y luego una azul.
- c. Los dos sucesos son iguales de probables.

Parte III. Ítems abiertos

Ítem 11. Define probabilidad simple y probabilidad condicional, dando un ejemplo de cada una de ellas

Ítem 12. Completa el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios:

- a. Observar el género (hombre/mujer) de los hijos de las familias con tres descendientes (ejemplo MHM,...).
- b. Observar el género (hombre/mujer) de los hijos de las familias con tres descendientes en los que dos o más son hombres.

Ítem 13. Hemos lanzado dos dados y sabemos que el producto de los dos números obtenidos ha sido 12 ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los dos números sea un 6? (Se diferencia si un número ha aparecido en un dado o en otro).

Ítem 14. En una ciudad el 60 % son hombres y el 40 % mujeres. El 50 % de los hombres y el 25 % de las mujeres fuman. Si se escoge una persona al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que sea fumadora?

Ítem 15. Una persona lanza un dado y anota si saca un número par o impar. Se trata de un dado no sesgado (es decir todos los números tienen la misma probabilidad). Estos son los resultados al lanzarlo 15 veces: par, impar, impar, par, par, impar, par, par, par, par, impar, impar, par, par, par. Lanza el dado de nuevo ¿Cuál es la probabilidad de sacar un número par en esta nueva tirada?

Ítem 16. Un grupo de alumnos de un colegio se examina de matemáticas e inglés. La proporción de alumnos que aprueban matemáticas es del 80% y la proporción de alumnos que aprueba inglés es del 70%. Suponiendo que las notas en cada una de las asignaturas son independientes, ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno escogido al azar haya aprobado ambas asignaturas?

Ítem 17. En una encuesta publicada en un periódico se informa que el 91% de los habitantes de una ciudad mienten usualmente y, de ellos, el 36% mienten sobre cosas importantes. Si elegimos al azar a una persona de esta ciudad, ¿Cuál es la probabilidad de que mienta sobre cosas importantes?



Ítem 18. Totohasina (1992). En una encuesta publicada en un periódico se informa que el 91% de los habitantes de una ciudad mienten usualmente y, de ellos, el 36% mienten sobre cosas importantes. Si elegimos al azar a una persona de esta ciudad, ¿Cuál es la probabilidad de que mienta sobre cosas importantes?